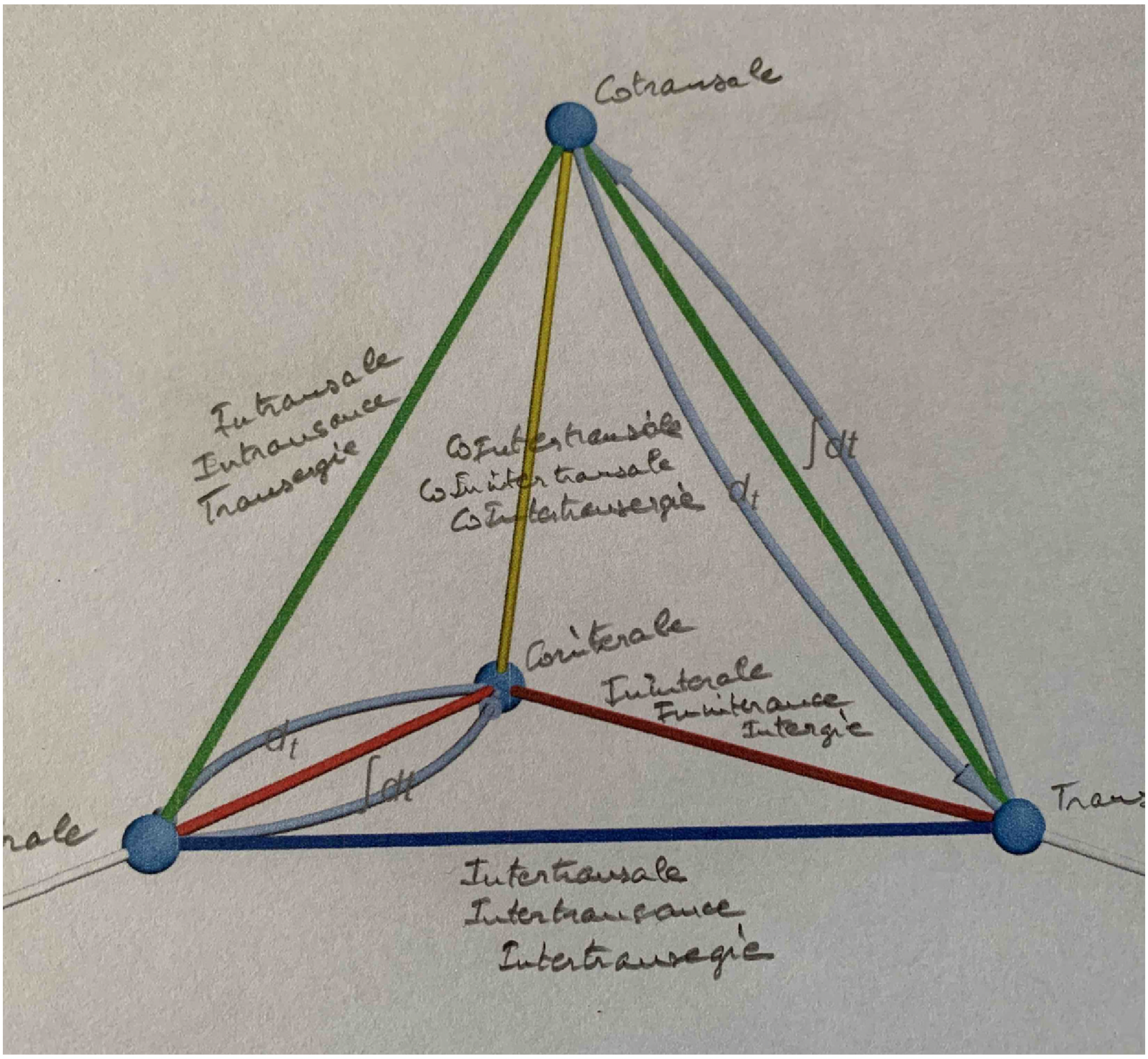
Modélisation conceptuelle



La dérivée d'un champ scalaire est une flèche

La dérivée d'un champ vectoriel est un tenseur

La valeur locale de la i-ème extensité (bactérie) est sa densité i : ρ_i

Contenue dans un volume par définition la quantité d'extensité dans un volume est égale à l'intégrale de la densité sur le volume

$x_i = \int_V \rho_i \, dv$ (quantité de bactéries dans le réacteur)

$S_i = \int_V s_i \, dv$ (bactéries qui font des petits dans le réacteur)

$I_i = \oint_F \mathrm{j}_i \, d\mathrm{f}$, **j** et **f** (Nombre de bactéries net qui rentrent ou sortent du réacteur)

Différence locale des intensités y_k(inhomogénéités) décrites par ∇

$$\nabla = \left\{e_1 * \frac{\partial}{\partial x_1}, e_2 * \frac{\partial}{\partial x_2}, e_3 * \frac{\partial}{\partial x_3}\right\}$$

L'intensité en question est un nombre et en lui appliquant le nabla ∇ on obtient le gradient

$$\nabla y_k = \mathrm{grad}(y_k)$$

La densité de courant de la i-ème extensité vaut une somme de produits des gradients des intensités individuelles y_k par les conductivités $L_{i\,k}$

$$j_i = \sum_{k=1}^{N} L_{i\,k} \, \mathrm{grad}(y_k)$$

Introduisons les valeurs locales dans l'équation de bilan

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho_i \, dv = \int_V s_i \, dv - \oint_F \mathrm{j}_i \, d\mathrm{f}$$

Le bilan de l'i-ème extensité est toujours referé au volume entier

Le second terme à droite est une intégrale de surface qui peut être convertie en une intégrale de volume avec Gauss-Ostrogradsky

Ce théorème dit que l'intégrale de surface d'une flèche sur une surface fermée F est égale à l'intégrale de volume de la divergence de la flèche dans le volume renfermée par la surface F

$$\oint_F \mathrm{j}_i \, d\mathrm{f} = \int_V \mathrm{div} \, \mathbf{j}_i \, dv$$

La signification biologique de la flèche divergence div **j** est facile à comprendre

Tout comme la quantité d'une extensité contenue dans un certain volume est égale à l'intégrale de volume de sa densité, la creátion d'une source est égale à l'intégrale de volume de la densité de source

Ainsi, le flot total est égal à l'intégrale de volume d'une densité de flot volumétrique.

Cette densité de flot n'est rien d'autre que div $\boldsymbol{j}_i$

La commutation de la différentiation et de l'intégration par rapport au temps nous donne

$$\int_V \left(\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \mathrm{div} \, (\mathbf{j}_i) - s_i \right) dv = 0$$

Pour que l'intégrale soit identiquement nulle soit indépendante des limites d'intégration, l'intégrand lui même doit être nul

On arrive donc à l'équation de transport

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \mathrm{div} \, (\mathbf{j}_i) = s_i \qquad \text{Équation de transport}$$

La seule restriction sur les ρ_i est qu'elle doivent être des densités d'une extensité

En remplaçant la densité de courant par la forme locale de l'équation de Onsager on obtient

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \mathrm{div} \left(\sum_{k=1}^{N} L_{i\,k} \, \mathrm{grad}(y_k) \right) = s_i$$

La relation de Onsager donne les densités de flot conductif des extensités individuelles

Si le centre de masse du milieu est lui même en mouvement c'est-à-dire s'il y a un mouvement macroscopique, ce mouvement entraine des extensités qui sont des propriétés du milieu

Les densités de flot convectif

Si en tout point la densité de la i-ème extensité est ρ_i et la vitesse de déplacement de ce point est **w** alors le flot convectif de densité sera

$$\rho_i \, \boldsymbol{w}$$

Le flot densité totale est la somme du flot conductif et du flot convectif

$$\mathbf{j}_i = \rho_i \, \boldsymbol{w} + \sum_{k=1}^{N} L_{i\,k} \, \mathrm{grad}(y_k)$$

En substituant cette équation dans l'équation de transport on obtient :

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \mathrm{div} \left(\rho_i \, \mathbf{w} + \sum_{k=1}^{N} L_{i\,k} \, \mathrm{grad} \, (y_k) \right) = s_i$$

C' est le modèle mathématique de tout système dynamique

Il suffit d'identifier :

- les extensités et les intensités du système considéré

- une expression concrète des sources

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \mathrm{div} \left(\rho_i \, \mathbf{w} + \sum_{k=1}^{N} L_{i\,k} \, \mathrm{grad} \, (y_k) \right) = s_i$$

Exemple

Le terme diffusion signifie le transport conductif d'un composant chimique avec une tendance de rendre la distribution de densité uniforme entre les phases

La difussion moléculaire se produit quand un système comprends des composants non homogènes en potentiel chimique

On suppose que le système est homogène dans toutes les intensités sauf le potentiel chimique c'est-à-dire qu'il n'y a pas d'effet croisé thermodiffusion, électrodifussion, ...

Il n'y a pas de source interne c'est-à-dire pas de réaction chimique

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div} \, L_{\rho\,\mu} \, \mathrm{grad} \, \mu = 0 \text{ première}$$

Le potentiel chimique μ est l'intensité pertinente pour le transport de masse

La direction de difussion est contrôlée par la tendance à rendre le potentiel chimique uniforme dans l'équation ci-dessus $L_{\rho\,\mu}$ est le coefficient de diffusion par rapport à μ

La densité de flot de transport de mass est

$$\boldsymbol{J}_\rho = L_{\rho\,\mu} \, \mathrm{grad} \, \mu$$

Le potentiel chimique est une fonction de la température T et de la densité ρ

$$\mu = \mu \, (\mathrm{T}, \rho)$$

Donc

$$\mathrm{grad} \, \mu = \frac{\partial \mu}{\partial T} \, |_\rho \, \mathrm{grad}(T) + \frac{\partial \mu}{\partial \rho} \, |_T \, \mathrm{grad} \, \rho$$

où les suffixes ρ et T derrières les barres verticales indiquent que les dérivées partielles doivent être prises à température et à densité constante

En écrivant la première on a supposé que les cas considérés ne concerneraient que toutes les intentistés soient homogènes sauf la densité et le potentiel chimique c’est-à-dire

grad T = 0

La densité de flot

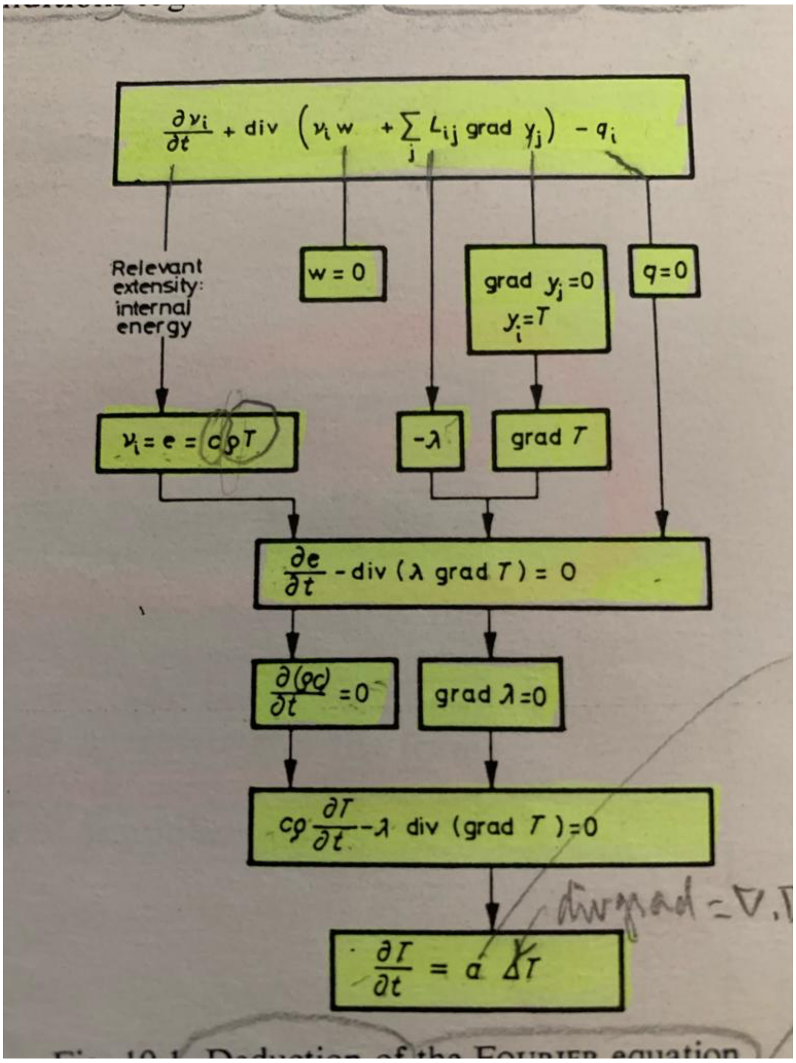
$$\boldsymbol{J}_\rho =$$

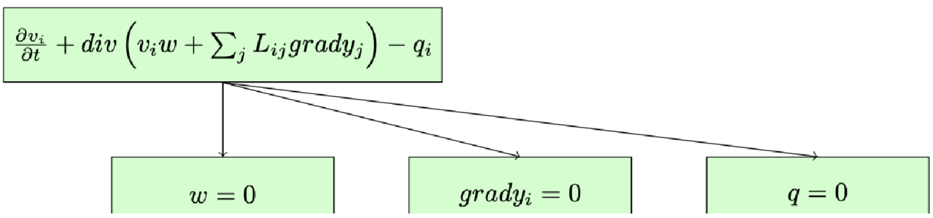
$$L_{\rho\mu}\,\mathrm{grad}\,\mu =$$

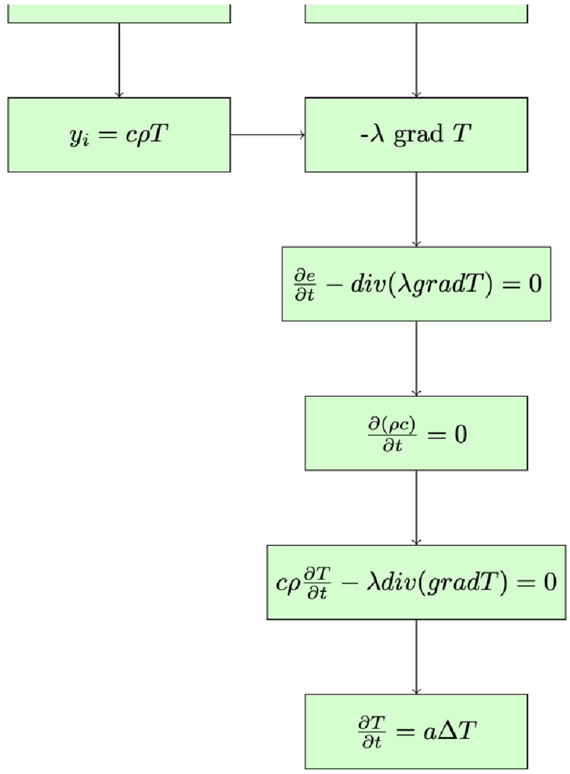
$$\left[L_{\rho\mu}\,\frac{\partial\mu}{\partial\rho}\right]\mathrm{grad}\,\rho =$$

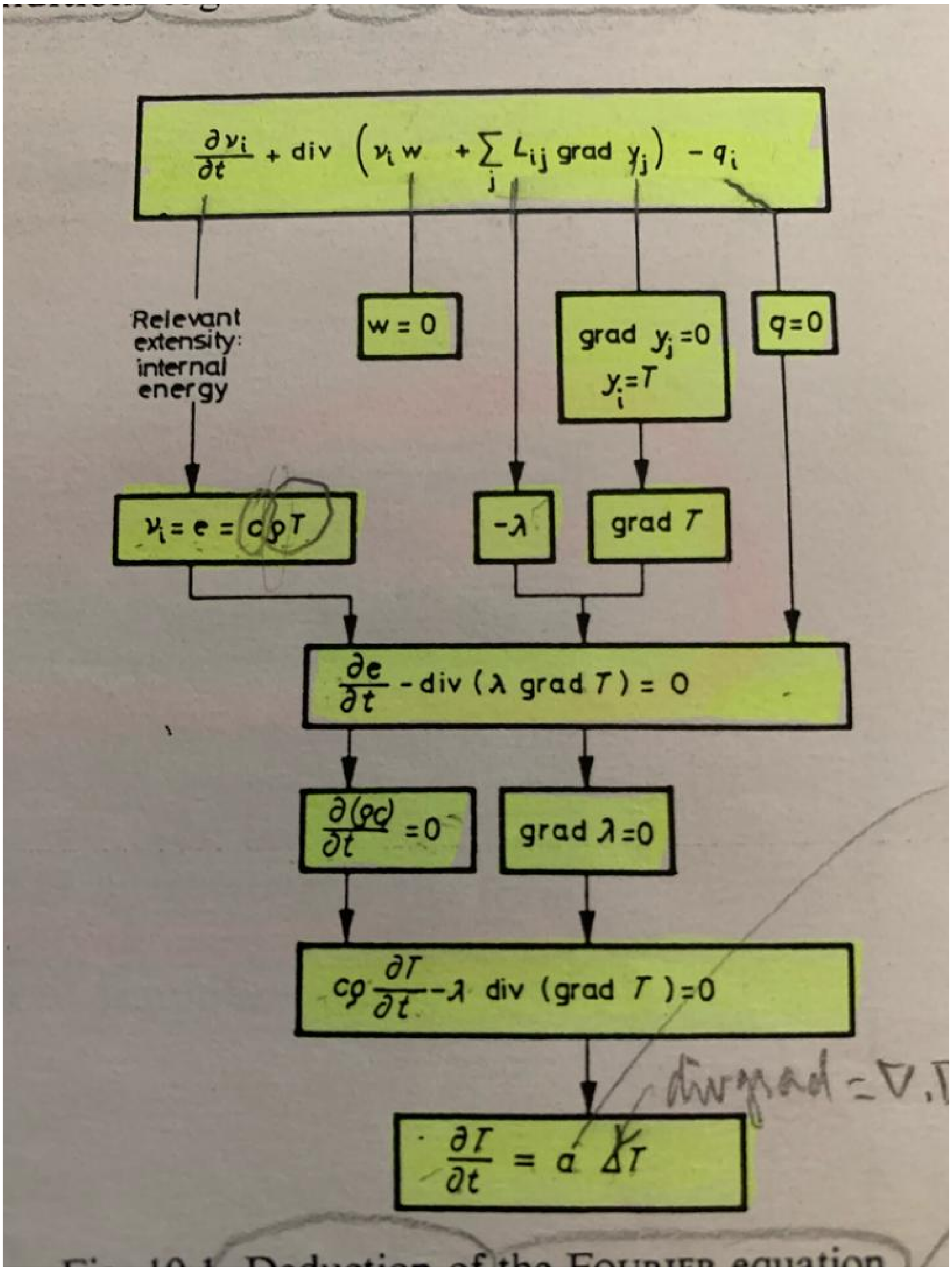
-D grad ρ avec

$$\mathrm{D} = -\,L_{\rho\mu}\,\frac{\partial\mu}{\partial\rho}$$






$y_i = c\rho T$
-λ grad T
$\frac{\partial e}{\partial t} - div(\lambda gradT) = 0$
$\frac{\partial(\rho c)}{\partial t} = 0$
$c\rho\frac{\partial T}{\partial t} - \lambda div(gradT) = 0$
$\frac{\partial T}{\partial t} = a\Delta T$



$\frac{\partial \nu_i}{\partial t} + \mathrm{div}\left(\nu_i w + \sum_j L_{ij}\,\mathrm{grad}\, y_j\right) - q_i$
Relevant extensity: internal energy
$w = 0$
$\mathrm{grad}\; y_j = 0$
$y_i = T$
$q = 0$
$\nu_i = e = c\varrho T$
$-\lambda$
$\mathrm{grad}\; T$
$\frac{\partial e}{\partial t} - \mathrm{div}\,(\lambda\,\mathrm{grad}\,T) = 0$
$\frac{\partial(\varrho c)}{\partial t} = 0$
$\mathrm{grad}\;\lambda = 0$
$c\varrho\frac{\partial T}{\partial t} - \lambda\;\mathrm{div}\;(\mathrm{grad}\;T) = 0$
$\frac{\partial T}{\partial t} = a\;\Delta T$

potentiel chimique

Let us recall that chemical potential is a function of temperature T and density ϱ that is,

$$\mu = \mu(T, \varrho).$$

$f = f(A, b)$

Hence

$$\text{grad } \mu = \left[\frac{\partial \mu}{\partial T}\bigg|_{\varrho} \text{grad } T\right] + \left[\frac{\partial \mu}{\partial \varrho}\bigg|_{T} \text{grad } \varrho\right]$$

$\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial A}\Big|_b \text{grad } A + \frac{\partial f}{\partial b}\Big|_A \text{grad } b$

where the suffixes ϱ and T beside vertical slashes indicate that partial derivatives are to be taken at constant density and temperature, respectively. In writing Eq. (10.11), it has been stipulated that cases will only be considered where all intensities are homogeneous except density and chemical potential, that is,

$$\text{grad } T = 0.$$

$\text{grad } A = 0$

Hence, the flow density of mass transport is

$$\mathbf{J}_{\varrho} = L_{\varrho\mu} \text{ grad } \mu = \left[L_{\varrho\mu} \frac{\partial \mu}{\partial \varrho}\right] \text{grad } \varrho = -D \text{ grad } \varrho,$$

$f_b = F_{bf} \text{ grad } f = \left[F_{bf} \frac{\partial f}{\partial b}\right] \text{grad } b$

$= -D \text{ grad } b$

where

$$D = -L_{\varrho\mu} \frac{\partial \mu}{\partial \varrho}$$

$D = -F_{bf} \frac{\partial f}{\partial b}$

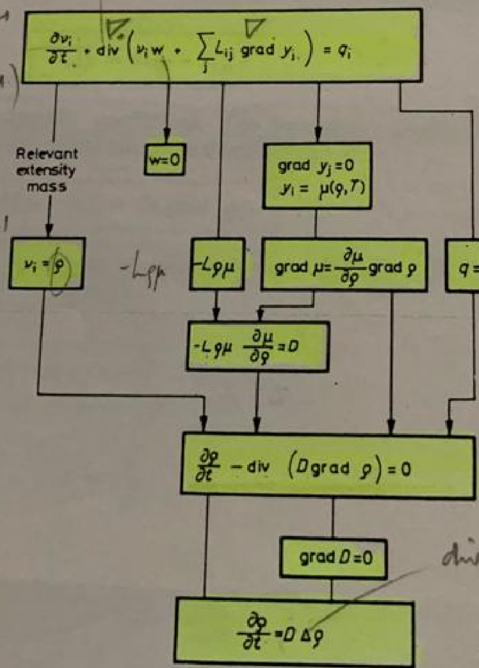
d^{-1}

$t^{-1} + \text{div}(\rho B^{-1} d t^{-1} + L \text{ grad } \rho B^{-1})$

d^{-1}

$dt^{-1} d^{-1} \rho B^{-1}$

$\rho d t^{-1} B^{-1}$



$-L_{\rho\mu} \frac{\partial \mu}{\partial \rho}$

$\text{div grad} = \nabla^2 = \Delta$

$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}$

Fig. 10.5. Deduction of the FICK equation

$\rho_t = \Delta \rho$

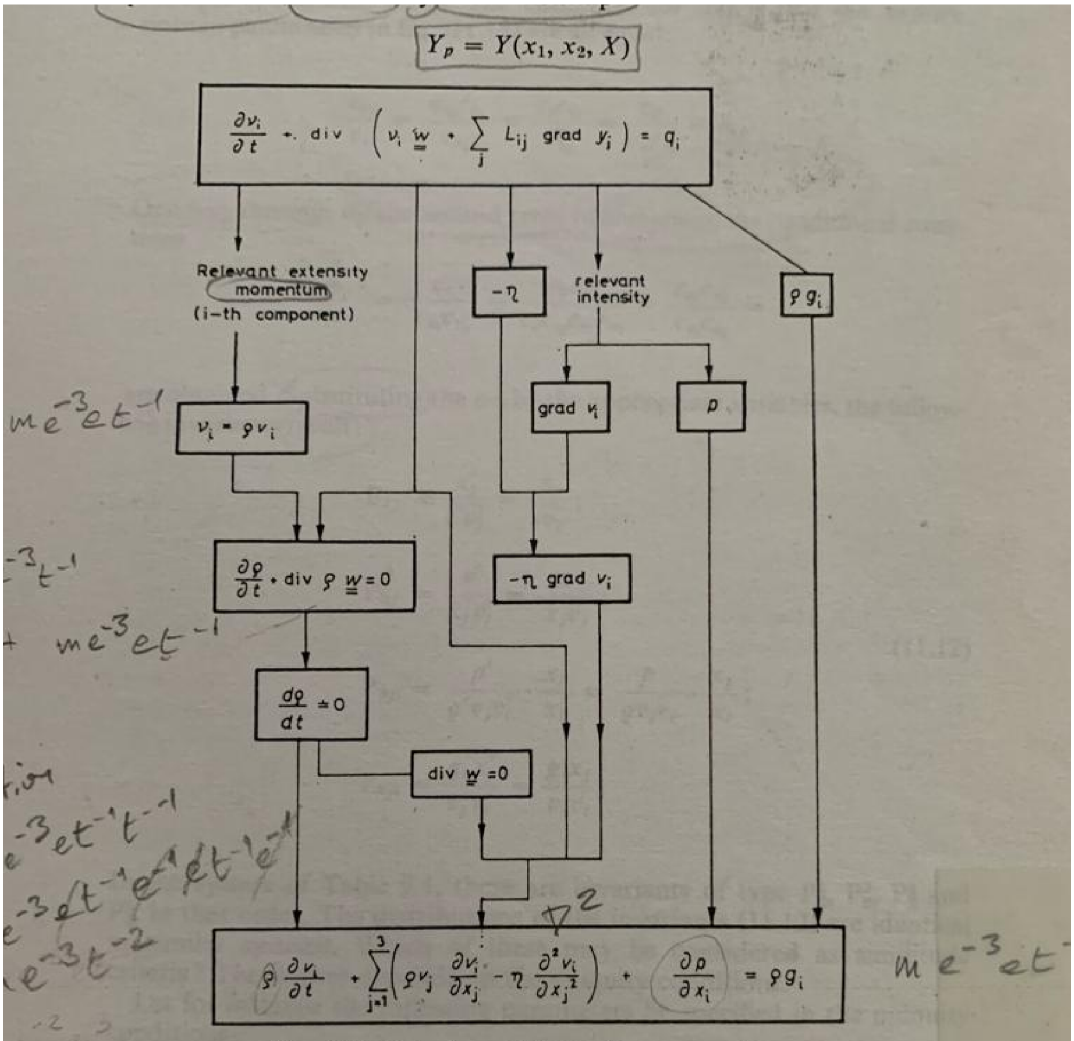


Fig. 11.1. Deduction of NAVIER–STOKES equation

which describes the geometry of the flow-space boundary. (It is usually stated in terms of the actual geometry of the equipment.)

Other requirements of initial conditions include the velocity, viscosity and density distributions at the instant $t = 0$:

$$\boxed{v_{i0} = v_i(0, x_1, x_2, x_3),}$$
$$\boxed{\eta_0 = \eta(0, x_1, x_2, x_3),}$$
$$\boxed{\varrho_0 = \varrho(0, x_1, x_2, x_3).}$$

en t_0

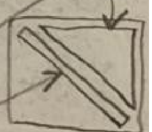
$$\frac{\partial \nu_i}{\partial t} + \operatorname{div}\left(\nu_i \vec{w} + \sum_{k=1}^{m} L_{ik} \operatorname{grad} y_i\right) = g_i$$

The conductive flow density of momentum (in other terms, the stress tensor T) is defined by the general symmetry properties of bodies and by transport theoretical considerations as

$\bar{\bar{I}}$ $\quad \bar{\bar{\sigma}} = 2\mu \bar{\bar{\varepsilon}} + \lambda(\mathrm{tr}\,\bar{\bar{\varepsilon}})\bar{\bar{I}}$

$$T = \overset{r_1}{L_1} S + \overset{r_2}{L_2} S' U, \tag{12.1}$$

divergence de S



where U is the unit tensor; L_1 and L_2 are coefficients of conduction depending on material quality; S is the symmetric component of the gradient tensor of the deformation vector; S' is the divergence of that vector.*

12.1.1.2. THE MOMENTUM BALANCE

Formally, the fundamental equation can be derived once again from the general balance equation (3.17) (cf. p. 83). The derivation resembles that performed in Chapter 11, except that the absence of convective flow must be taken into account, as must the fact that velocity equals the temporal rate of change of the deformation vector. That is, the rate of deformation is is

$$\mathbf{w} = \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial t}.$$

e, the momentum density—the product of the mass density
and of its rate of deformation—is

$$\varrho \mathbf{w} = \varrho \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial t}.$$

ntum flow density, purely conductive, equals the stress
The source density of momentum equals the density of e
$\varrho \mathbf{F}$. Substituting this into the transport equation, a relat
ous to the balance equation (11.6) is obtained:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\left(\varrho \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial t}\right) + \mathrm{Div}\,[L_1 \nabla \circ \mathbf{s} + L_2(\nabla \mathbf{s})\, \overset{=}{U}] = \varrho \mathbf{F}.}$$

gradient tensor of the deformation vector is $\nabla \circ \mathbf{s}$. Let its symmetric
denoted by S. The ij component of S is

$$(\nabla \circ \mathbf{s})^s_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial s_i}{\partial x_j} + \frac{\partial s_j}{\partial x_i}\right).$$

rgence of the deformation vector,

$$S' = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial s_j}{\partial x_i} = \nabla \mathbf{s}.$$

Modélisation mathématique

La complexité d’un modèle aux équations aux dérivées partielles devient inextriquable si on considère la representation mathématique en elle même

En utilisant uniquement des équations différentielles du premier ordre une forme classique découlant d’une connaissance a priori de la réalité donne pour le cas déterministe

1

$$F_0(\boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{z}, t) = \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \sum_{i-1}^{k} F_i(\boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{z}, t) \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial z_i} = f(\boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{z}, t)$$

2

$$b(\boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{z}, t) = 0 \text{ pour } z \in \partial \mathbf{Z}$$

3

$$\Phi(z, 0) = \Phi^0(z)$$

4

$$\mathbf{y}(\mathrm{t}) = \int_{Z_{s(t)}} \mathbf{g}'(\boldsymbol{\Phi}, \mathbf{p}, \mathbf{z}, \mathrm{t})\, d\mathbf{z} \text{ ou bien } \mathbf{y}(\mathbf{x},\mathrm{t}) = \mathbf{g}(\boldsymbol{\Phi},\mathbf{p},\mathbf{z},\mathrm{t})$$

5

$$0 \leq \mathbf{h}(\boldsymbol{\Phi},\mathbf{u},\mathbf{p},\mathbf{z},\mathrm{t})$$

Variable indépendante : les ODE ont seulement une variable indépendante par rapport au temps

Les PDE au contraire ont aussi une variable spatiale indépendante comme

1) une variable de temps t∈T: $(t_1, t_2) \subset \mathbb{R}$

2) variables spatiales $\mathbf{z} \in Z \subset \mathbb{R}^k$

L'ensemble ouvert compact Z est appelé le champ

Les entrées $u \in U \subset \mathbb{R}^m$

Un segment d'entrée: map Z×T → U:**u**(**z,**t)

Les variables dépendantes : $\boldsymbol{\Phi} \in \Phi \subset \mathbb{R}^n$

Par l'équation 1, les variables dépendantes sont fonctions de z et t

Les paramètres : **p** est un vecteur de quantité inconnue que l'on considère ici comme constante et donc indépendante des variables **z** et t.

Des nombreux auteurs autorisent une dépendance en **z** et t et arrivent ainsi à des espaces de paramètres de dimension infinie ce qui est valable du point de vue concret une certaine propriété de la réalité appelée paramètre de la réalité peuvent être distribuées dans l'espace et dans le temps.

Pour la modélisation, on préfère souvent des paramètres vraiment constants et on inclus la relation fonctionnelle dans la structure

La PDE 1) consiste en un nombre d'opérateurs reliant les dérivées partielles

$F_0, F_1, \ldots, F_k$ et **f** sont respectivement des fonctions matricielles et un fonction vectorielle de Φ×Z×T

La condition aux limites 2) spécifie les valeurs de Φ dans le temps à la frontière du champ

$\mathbf{z} \in \delta Z$ (δZ est la frontière de Z)

La condition initiale 3) spécifie la valeur de Φ au temps initial t.

Variable de sortie **y**:

$y \in Y \subset \mathbb{R}^p$

Ces variables pourraient être fonction de l'espace et du temps

En général cependant les capteurs ne couvrent pas l'entiereté du champ et en outre ils produisent une activité moyennante sur un domaine spatial $Z_{s(t)}$qui peut varier dans le temps. En conséquence la forme explicite de l’équation de sortie dépend du type de senseur (voir équation 4)

Les contraintes : l’ensemble de contraintes de l’équation 5) incorpore de la connaissance a priori concernant les paramètres

ODE

Des modèles inviariants temporellement, en temps continu, à paramètre concentré

Modèle = (U,X,Y,**f**,**g**)

u∈U : ensemble des entrées

x ∈ X : ensemble des états

y ∈ Y : ensemble des sorties

f fonction d’évolution, de changement, de comportement (satisfait Lipschitz)

et

g fonction de sortie

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x},\mathbf{u})$$

Pour des nombreuses applications on aime avoir l’option de spécifier des entrées non mesurables et aléatoires, ces perturbations peuvent être conçues comme l’impact de la partie inobservable et ingouvernable de l’environement sur le modèle

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}, t)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x},\mathbf{u},\mathbf{v},\mathrm{t})$$

Les vecteurs additionnels **w**, **v** sont des modèles de perturbation aléatoires

des conditions d' existance d' une solution pour l’équation différentielle stochastique doivent être fournies

si **w** et **v** sont des processus stochastiques vectoriels aléatoires alors **x** et **y** le seront aussi.

PDE (modèles distribués)

Des nombreuses réalités ont la propriété de varier continûment dans l’espace

Les modèles distribués prennent en compte ce facteur

Un formalisme général pour les PDE n’a jamais été vraiement établit

La description suivante pourrait être donné

modèle M = (U,Φ,Y,**f’**,**b**,**g**)

$$0 = \boldsymbol{f}'\left(\boldsymbol{\Phi}, \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial t}, \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}}{\partial \boldsymbol{z}_i}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{z}, t\right) \qquad \mathbf{z} \in Z$$

$$0 = \mathbf{b}(\boldsymbol{\Phi}, \mathbf{z}, \mathrm{t}) \qquad \mathbf{z} \in \delta Z$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{g}(\boldsymbol{\Phi},\mathbf{z},\mathrm{t})$$

En plus de la variable indépendante t, la coordonée spatiale **z** est introduite

Φ est le vecteur de variable dépendantes qui peuvent varier dans l'espace et dans le temps

Les équations sont valables dans le domaine spatial Z si des conditions sont fournies à la frontière du domaine δZ

Il y a des entrées **u** et des sorties **y**

bien que le modèle soit bien plus complèxe que les ODE, il convient y remplir certaines conditions d'existence et d'unicité

La caractéristique la plus importante de cette structure est la dimensionalité infinie de l'ensemble des états Q

L'ensemble déènd de **Φ** qui à un instant du temps est une fonction des variables spatiales

Les conditions aux limites ont également un rôle dans le choix de l'état

Les équations

Les propriétés intrinsèques de la réalité qui déterminent les paramètres des équations de comportement sont continûment définies dans le continuum espace-temps.

La variable temps apparaît comme variable indépendante dans les modèles seulement pour les réalités instables

Des nombreux problèmes de la réalité sont concernés seulement par des états statiques ou stables

Cependant, quand la variable temps apparaît dans le modèle, un cas spécifique de temps est arbitrairement désigné par la pensée comme t = 0 et une solution est recherchée seulement pour t ≥ 0.

Les variables dépendantes du modèle sont les faits réels qui sont mesurés avec des instruments et constituent les exitations et réponses de la réalité.

En première approche on peut distinguer deux catégories principales de ces faits

1. Des fonctions potentiel qu'on appelle aussi inter (across)

Les variables inter relient la condition en un point de la réalité à un autre point de la réalité ou à un point de reférence arbitraire

L'instrument de mesure d'une inter doit être appliqué en deux points séparés de la réalité et la taille de cette variable/mesure represente habituellement une différence de taille entre les deux points

Par exemple : la température qui est l'inter de la thermique est toujours reférée au zéro de la glace ou au zéro absolu

La pression ou dans les réalités grabitationnelles de potentiel vitesse est la variable inter de la mécanique des fluides

Le voltage électrique ou potentiel électrique est la variable inter des réalités électrostatiques ou électrodynamiques

2. Des fonctions trans, (flot, flow, through , flux)

Une variable trans d'autre part nécessite un seul point dans la réalité pour sa mesure et represente une mesure du flot traversant une surface élementaire de la réalité

Ainsi, un flot de chaleur dans une réalité thermique, un flot de fluide dans une réalité mécanique, et la densité de courant dans un système électrodynamique sont des variables trans.

Mathématiquement la variable inter est généralement un nombre alors que la variable flot est généralement une flèche

Les paramètres du modèle, c'est à dire les coefficients des équations caractéristiques sont dérivées des propriétés intrinsèques de la réalité constituant le problème. Et dans le cas des systèmes linéaires sont indépendant de toute exitation ou réponse existante

Ils peuvent être mesurés en obtenant un échantillon de cette réalité et en faisant une expérience de laboratoire

Lors d'une telle expérience une exitation est appliquée à l'échantillon et la réponse résultante est mesurée

La nature et la taille des paramètres est déduite de la relation entre ces exitations et ces réponses

L'expérience scientifique démontre que les paramètres tombent pratiquement toujours dans trois classes

1. Dissipateur ou amortisseur
2. Reservoir de potentiel, reservoir de inter, qui s'accumule sous forme de cointerale dans l'ininterale (qui empêche l'interale) et restitue une transale
3. Reservoir de flot, reservoir de trans, qui s'accumule sous forme de cotrans dans l'intransale (qui empêche une transale) qui restitue une interale

Quand la réalité est dissipatrice la relation entre le potentiel et le flot (entre l'intérale et la transale) est une relation de proportionalité

Considérons une réalité décrite par un seul fait (une seule variable spatiale orientée dans la direction x par exemple un morceau de fil électrique)

Une différence de potentiel Δp est appliquée aux deux extremités et un courant est mesuré

$$\Delta p = -D \Delta x\, f$$

où D est la dissipativité par unité de longueur et Δx est la distance entre les deux extrémités du fil

Le signe moins (lateralité) indique que le flot positif est dans la direction des potentiels décroissants

Si Δx est fait tendre vers 0, l'équation devient

$$\frac{dp}{dx} = -D f$$

Dans le cas multidimensionnel on a

$$\nabla p = -D f$$

Où le terme de gauche est le gradient du potentiel

Le paramètre D est une mesure de la manière dont la réalité dissipe l'énergie en la transformant en chaleur

Dans le cas de réalité thermique cela donne une augmentation d'entropie

Ce terme D est appelé resistivité en électricité, viscosité dans les systèmes fluides et resistivité thermique pour les systèmes thermique

La réalité constituant le champ agit comme un reservoir si elle est capable de stocker temporairement de la matière ou de l'énergie

Dans le cas d'un reservoir de trans cette accumulation se produit chaque fois qu'on a une différence de potentiel entre deux points de la réalité plus la différence est grande et plus il y en a de stocké

Par exemple une capacité électrique stocke de l'énergie électrique chaque fois qu'une différence est appliquée à ses bornes

Quand une résistance ou un court circuit est placée entre ces bornes la capacitance produit un courantdans une direction telle à s'opposer à tout changement de potentiel

Pour un échantillon de réalité monodimensionnelle avec un reservoir d'inter (potentiel) La relation entre le potentiel et le flot est

$$\Delta f = - E_p \, \Delta x \, \frac{dp}{dt}$$

où E_p est la propriété d'accumulation de potentiel par unité de longueur et Δx est la longueur de l'échantillon

Si on fait tendre Δx vers 0 on obtient

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -E_p \frac{\partial p}{\partial t}$$

Pour une réalité pluridimensionnelle la relation devient

$$\nabla . f = -E_p \frac{\partial p}{\partial t}$$

La capacitance distribuée ou capacivité est le recervoir de potentiel des réalités électriques

La compressibilité joue le même rôle dans la dynamique des fluides

La capacité thermique ou la chaleur spécifique est le reservoir de potentiel des réalités thermiques.

Dans le cas d'un reservoir de flot la réalité constituant le champ agit comme reservoir d'énergie chaque fois qu'un flot passe à travers (trans)

Par exemple dans un circuit électrique une inductance stocke l'énergie électrique dans son champ

Si les bornes de la bobine sont court-circuités un potentiel est produit avec une polarité (lateralité) tendant à s'opposer à tout changement de courant (de flot, trans)

Par exemple pour un échantillon de longueur Δx la relation entre le flot et le potentiel est

$$\Delta p = - E_f \, \Delta x \, \frac{df}{dt}$$

où E_f est une mesure de la propriété d'accumuler du flot par unité de longueur

de nouveau on fait tendre la longueur vers 0, ce qui donne

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -E_f \frac{\partial f}{\partial t}$$

Si c'est une réalité multidimensionnelle on obtient

$$\nabla . p = -E_f \frac{\partial f}{\partial t}$$

Une inductance distribuée (ou inductivité) est le paramètre du reservoir de courant dans les réalités électrique

La densité ou l’inertie joue le même rôle dans les réalités fluides

D’autre part les réalités thermiques ne présentent jamais de propriété de reservoir de flot

Les trans et inter les plus pertinentes tel qu’elles apparaissent dans les domaines les plus usuels de la réalité physique sont les suivants :

Domaine	Inter	Trans	D	E_f	E_p
Électrodynamique Électrostatique	Voltage Potentiel électrique	Courant Flux	Résistivité –	Inductivité –	Capacitivité Permitivité diélectrique
Magnétisme Électromagnétisme	Potentiel MMf Potentiel EM	Flux Flux	Reluctance Conductivité	Perméabilité Perméabilité	– Permitivité diélectrique
Statique	Déplacement	Force	–	Elasticité	–
Dynamique	Déplacement ou Vitesse	Force	Viscosité	Elasticité	Masse
Elasticité	Déformation	Contrainte	Viscosité	Module de Young	Inertie
Mécanique des fluides	Potentiel vitesse (pression)	Flot	Viscosité	Inertie	Compressibilité
Diffusion	Concentration	Transfert de masse	Diffusivité	Force d ' inertie	Compressibilité
Chaleur	Temperature	Flot de chaleur	Résistance thermique	–	Capacitance thermique

Ce tableau nous permet de faire des modèles de la réalité

La présence ou l’abscence de l’un ou de plusieurs des trois paramètres de base a une importance considérable dans la détermination du comportement de la réalité et de sa déscription mathématique

Quand un seul paramètre est présent le modèle mathématique prends la forme d’une équation elliptique, comme Laplace ou Poisson

Quand la dissipation est soit un reservoir de potentiel soit un reservoir de flot mais pas les deux est présent, l’équation est parabolique

Quand les deux types de reservoir sont présents on a une équation aux dérivées partielles hyperbolique

Les lois de la réalité (Nature, english)

Les deux grands principes de la réalité sont le principe de conservation et le principe de continuité

Le principe de conservation s’applique à toutes les réalités dont le transport est mesuré par une trans (through)

Selon ce principe la quantité totale de cette quantité existant dans le champ en tout temps, subsèquent à un temps initial t=0 doit être égale à la somme algébrique de la quantité nette ajoutée ou soustraite par les exitations externes plus la quantité initialement présente dans le champ au temps t=0.

Par exemple, dans les réalités électriques, la charge est conservée

Dans les réalités mécaniques dynamiques l’impulsion est conservée

Dans une réalité fluide la masse est conservée

Le principe de continuité concerne aussi les trans variables et spécifie que la trans variable est continue et doit émanner d’une source (exitation interne ou externe) et retourner à la même ou à une autre source (ou puits)

Généralement le principe de conservation implique le principe de continuité et vice versa

Généralement, cette une matière de convention terminologique qui a causé la prédominance d’un principe dans un domaine spécifique

La modélisation

Quelle que soit la réalité les équations impliquent l'espace et le temps comme variables indépendantes et les potentiels et les flux comme variables dépendantes et les trois sortes de paramètres

Toutes les lois de la réalité prennent la forme d'un principe de conservation

Les PDE constituant le modèle mathématique peuvent être dérivées par la procédure suivante qui est virtuellement indépendante de la réalité étudiée

1. Identifier les paramètres qui sont présents de manière non négligeble

Une réalité peut contenir les trois types : dissipation, réservoir de potentiel et reservoir de flux ou un ou deux de ces paramètres peuvent être présents

Parfois les trois paramètrss sont présents mais un ou deux de ses paramètres peuvent être négligeables dans la détermination des potentiels et des flots

Par exemple :

Un fil peut contenir de l'inductance et de la capacitance mais elle peut être ignorée dans la distribution du voltage de manière telle que seule la résistance est significative

2. Décider si le problème doit être formulé en une, deux ou trois dimensions spatiales et quel système de coordonnées est approprié.
Cette décision est généralement faite sur la base de la géométrie de la réalité et de l'effort de modélisation nécessaire.

Clairement, toutes les réalités existent en 3D et des modèles en 1 ou 2D impliquent évidement des approximations

En général un système de coordonées rectangulaire est préféré à moins qu'il y ait une symétrie par rapport à un point ou une ligne.

3. Sélectionner une région élémentaire typique

La géométrie de cet élément dépend du nombre de dimensions spatiales aussi bien que du système de coordonnées choisi

Dans un système orthogonal si la réalité peut être caractérisée de manière adéquate selon une seule dimension spatiale la portion élementaire est un segment de ligne de longueur Δx.

Si deux dimensions spatiales sont requises la portion élémentaire sera un rectangle de dimension $\Delta x \, \Delta y$

Si trois dimensions spatiales sont requises une portion élémentaire sera un solide rectangulaire $\Delta x \, \Delta y \, \Delta z$

Une approche similaire peut être employée dans d'autres systèmes de coordonnées comme cylindrique $\Delta\theta \, \Delta r \, \Delta z$, ou sphérique $\Delta r \, \Delta\beta \, \Delta\alpha$

4. Exprimer le flot à travers chaque frontière de la portion en termes de potentiel p et de sa dérivée par rapport à l'espace et/ou au temps

Pour une réalité de 1, 2 ou 3 dimensions, cela donne lieu à 2,4 et 6 équations respectivement

Ces équations sont dérivées de

$$\Delta p = -D \Delta x \, f$$

$$\nabla . \mathrm{f} = -E_p \frac{\partial p}{\partial t}$$

$$\nabla . \mathrm{p} = -E_f \frac{\partial f}{\partial t}$$

comme déterminé par les paramètres existant dans la réalité étudiée

5. Calculer le flot net dans l'élément

Quand la réalité purement dissipative cela implique seulement la sommation de flots à travers toutes les frontières de l'élément

Quand des paramètres reservoir sont présents le stockage dans le reservoir associé doit également être pris en compte

6. Invoquer le principe de conservation pertinent de la réalité

Ceci implique de tenir complètement compte de tous les flots entrant et sortant de l'élément

7. Faire tendre les dimensions vers 0 pour trouver l'équation de la réalité

Types de PDE

Ces étapes résultent en une PDE qui caractérise l'entier de la réalité

Avec l'exeption de la théorie de l'élasticité, les termes apparaissant dans l'équation différentielle caractéristique sont limités à des dérivées premières et secondes par rapport à l'espace et au temps

Une manière usuelle et pratique de classer les PDE de base provient du caractère mathématique du modèle

On peut la décrire succintement ci dessous pour faire le lien avec les mathématiques

Les PDE representant le comportement de la réalité ont la forme générale ci dessous:

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + 2 B \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \, \partial \beta} + C \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} = D \frac{\partial u}{\partial \alpha} + E \frac{\partial u}{\partial \beta} + F u + G$$

En admettant que les paramètres de A à G admettent une taille positive négative ou nulle toutes les équations du présent texte peuvent être exprimées comme un cas spécial de l'équation ci-dessous

Les deux variables independantes α et β peuvent être toutes deux des coordonnées spatiales ou l'une peut être une coordonnée spatiale et l'autre une variable temporelle

Les tailles relatives de A B et C déterminent la nature de l'équation

1. Si AC > B^2 comme c'est le cas si B=0 et A et C sont tous deux positifs, l'équation est appellée elliptique

Cette définition s'applique même si un autre terme H $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ où H est un nombre positif est additionné à gauche dans l'équation ci dessous

2. Si A C = B^2 est le cas si B est soit A soit C sont égaux à zéro, l'équation est appelée parabolique

L'addition d'une dérivée du second ordre telle que H $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ n'influence pas le caractère parabolique de l'équation.

3. Si A C < B^2comme c'est le cas si B ≥0 et soit A ou C sont négatifs l'équation est appellée hyperbolique

La classification des PDE dans ces trois catégories est intéressante car les méthodes de solution analytiques et numériques pour traiter des problèmes réels sont inhérement différentes selon les trois types d'équation

PDE elliptique

Équation de Laplace : Les PDE elliptiques caractérisent les réalités distribuées dans lesquels pas plus que 1 des trois types de paramètres apparaît avec une importance négligeable

C'est-à-dire toutes les réalités qui sont purement dissipatives, purement réservoir de potentiel ou purement reservoir de flot sont modélisables par des PDE elliptiques

En outre les réalités contenant de la dissipation ainsi que des éléments réservoir sont caractérisées par des équations elliptiques quand elles ont atteint un état stable

Le cas le plus important et le plus fréquent de PDE elliptique est l'équation connue sous le nom d'équation de Laplace

C'est l'équation de base de la physique et de l'ingéniérie

Considère un système unidimensionnel (un fil) conducteur d'un flot, supposé avoir une dissipation constante de $\frac{D}{\text{unité de longueur}}$ et connectée à une extremité à une source de potentiel P_0 alors que l'autre extremité est connectée à une source de potentiel arbitraire.

Selon la procédure ci dessus on constate qu'on a affaire à une réalité contenant du D mais du E_p et E_f négligeable

C'est un système monodimensionnel orienté dans la direction x

Un segment élémentaire Δx dans la direction x de l'équation

$$\Delta p = -D \Delta x \, f$$

La relation potentiel flot aux deux bornes

$$(dp/dx)_1 = -D f_1$$

$$(dp/dx)_2 = -D f_2$$

Comme la réalité est supposée purement dissipative il ne peut y avoir de stockage dans le morceau élementaire

En vertu du pricipe de conservation

$$f_2 - f_1 = D$$

En résolvant les deux équations pour f_1 et f_2 et en substituant dans l ' équation ci - dessus

$$\frac{1}{D} (dp / dx)_2 - \frac{1}{D} (dp / dx)_1 = D$$

En multipliant les deux côtés de cette équation par D et en divisant des deux côtés par Δx

$$\frac{(dp / dx)_2 - (dp / dx)_1}{\Delta x} = 0$$

On fait tendre la taille x de la portion vers 0 ce qui donne

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0$$

Cette equation est connue sous le nom de l'équation de Laplace à une dimension.

Sa solution soit analytique soit numérique donne une fonction p(x)c'est à dire le potentiel en tout point de la réalité

Une telle solution n'est possible que si le potentiel ou le flot aux frontières de la réalité sont spécifiées

x = 0 $p = p_0$

à x = L $p = p_L = 0$

Les équations de Laplace

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0$$

Ces deux équations de Laplace peuvent être exprimées de manière plus compacte en introduissant le laplavien ∇^2

Quelle que soit la nature de la réalité, c'est-à-dire son nombre de dimensions l'équation de laplace devient

div(grad(p))= $\nabla.(\nabla \mathbf{p}) = 0$

$$\nabla^2 p = 0$$

Les exitations à la limite de précedents étaient spécifiés en terme de potentiel comme des sources de flot existent également dans la réalité il y a réellement deux types de condition à la frontière un potentiel spécifié et un flot spécifié comme nous l'avons dit et comme il n'y a pas de flot à travers une frontière non exité le gradient normal à cette frontière est égal à zero.

Si un flot non nul est spécifié à la frontière un gradient de potentiel normal à cette frontière doit être directement proportionnel à cette variable, les conditions aux limites peuvent donc être formulées sous une forme plus générale comme:

$$p = k_1$$

$$\frac{\partial p}{\partial n} = k_2$$

où k_1 et k_2 sont des constantes spécifiées ou des fonctions des variables spatiales, ils peuvent être positives, négatives ou zéro et /ou n est la direction normale à la frontière.

PDE Paraboliques

En concurence avec l'équation de Laplace l'équation parabolique est largement connue comme équation de diffusion ou équation de

On peut la dériver comme ci dessous dans un système monodimensionnel

Le fil contient maintenant une dissipation distribuée mais aussi un reservoir distribué tout le long, potentiel ou flux

Une résitance électrique couplée à la terre au moyen d'un diélectrique reservoir de potentiel ou une résistance thermique manifestant une résistance thermique (dissipation) et une capacité thermique (réservoir de potentiel)

L'élément différentiel est Δx en plus du flot

f_1 et f_2 le long du conducteur du fil il *y a* maintenant un flot f_3 qui rentre dans le reservoir

Le principe de conservation spécifie maintenant

$$f_1 - f_2 - f_3 = 0$$

si les propriétés de stockage par unité de longueur sont representées par E_p le flot servant à remplir le reservoir constitué par l'élément différentiel peut être exprimé en accord avec l'équation

$$\Delta f = - E_p \Delta x \frac{dp}{dt}$$

$$f_3 = f_1 - f_2 = - E_p \Delta x \frac{dp}{dt}$$

où p represente le potentiel moyen par rapport à la terre et $E_p \Delta x$ est la capacité totale de stockage de cet élément la différence entre le flot f-1 et f_2 exprimé en taux de changement de flot par unité de longueur

$$f_1 - f_2 = -\frac{\partial f}{\partial x} \Delta x$$

si des termes d'ordre supérieur d'une expension en série de Taylor sont négligés mais en accord avec l'équation

$$\frac{dp}{dx} = -D f$$

Le flot f peut être representé en termes d'un gradient de potentiel

$$f = -\frac{1}{D} \frac{\partial p}{\partial x}$$

où D represente à nouvau la dissipation par unité de longueur

Cette équation correspond à l'équation électrique familière $i = \frac{u}{R}$

En différentiant l'équation ci dessous par rapport à x

$$-\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{D} \frac{\partial p}{\partial x}\right)$$

En combinant on obtient

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{D} \frac{\partial p}{\partial x}\right) = E_p \frac{dp}{dt}$$

Si la dissipation D n'est pas une fonction de x, c'est à dire que le fil est uniforme

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = D\, E_p \frac{\partial p}{\partial t}$$

Qui est connue comme l'équation de diffusion à une dimension.

Une spécification complète du problème inclu les potentiel $p(0,t)$ et p(L,t) aux deux extremités de la réalité en tout temps susequent à un temps initial t=0 aussi bien que le potentiel p(x,0) tout le long du fil à l'instant initial

Ce type de problème nécessite donc plus d'information que l'équation de Laplace à une dimension

La PDE pour un champ tridimensionnel contenant de la dissipation et un type de reservoir peut être dérivée de manière identique

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{D} \frac{\partial p}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{D} \frac{\partial p}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{D} \frac{\partial p}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{D} \frac{\partial p}{\partial z}\right) = E_p \frac{\partial p}{\partial t}$$

Pour un D uniforme

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}=D\,E_p\,\frac{\partial p}{\partial t}$$

En introduisant le laplacien on obtient

$$\nabla.\left(\frac{1}{D}\,\nabla \boldsymbol{p}\right)=E_p\,\frac{\partial p}{\partial t}$$

ou

$\nabla^2 p \;=\; k\,\frac{\partial p}{\partial t}$ où k est déterminé par les paramètre de la réalité

Les conditions aux limites pertinentes à cette équations sont même que Laplace

en plus conditions initiales doivent être fournies.

Si des reservoirs de potentiel sont présents, la distribution de potentiel initial p(x,y,z,0) doit être donnée

Si des reservoirs de flot sont présents le taux de changement initial du potentiel ∂p(x y z 0)/∂t doit être fourni

PDE hyperbolique

La troisième équation fondamentale est appelée équation d'onde et décrit la réalité familière du mouvement des vagues

$$-\frac{\partial f}{\partial x}=E_p\,\frac{\partial p}{\partial t}$$

où E_p est un réservoir de potentiel par unité de longueru

De même le gradient de potentiel est relié au changement de flot selon

$$-\frac{\partial p}{\partial x}=E_f\,\frac{\partial f}{\partial t}$$

En électricité ce sont les équations familières

$$\mathrm{i}=\mathrm{c}\,\frac{\mathrm{du}}{\mathrm{dt}}$$

$$\mathrm{u}=\mathrm{L}\,\frac{\mathrm{di}}{\mathrm{dt}}$$

En différentiant $-\frac{\partial f}{\partial x}=E_p\,\frac{\partial p}{\partial t}$ par rapport au temps

et puis la deuxième $-\frac{\partial p}{\partial x}=E_f\,\frac{\partial f}{\partial t}$ par rapport à x

donne

$$-\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial t}=E_p\,\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$$

$$-\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial t}=\frac{1}{E_f}\,\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$$

en combinant ces deux équations on obtient

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}\;=\;E_p\,E_f\,\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$$

qui est connue comme l'équation d'onde à une dimension

Pour prédire le potentiel variable sur le nom d'une réalité monodimensionnelle les potentiels en x=0 et x=L doivent être connus en tout temps comme en Laplace et diffusion

En plus deux conditions initiales sont requises, ces conditions initiales correspondent au potentiel et au flot en tout point de la réalité au temps initial t = 0 ceci peut correspondre à une spécification d’un potentiel P(x,0) le taux de changement de potentiel ∂p(x,0)/∂t.

bidimensionnelle et tridimensionnelle possède des potentiels distribués et de reservoir de flots dans un plan ou une 3-region respectivement

L’analyse ci dessus mène à

$$\nabla^2 p = \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$$

$$-\frac{df}{dx} = \frac{1}{D_p} p + E_p \frac{dp}{dt}$$

PDE biharmonique

Une classe spéciale d’équations apparaît dans la théorie de l’élasticité

Ces équations sont généralement similaires aux PDE elliptiques, paraboliques et hyperboliques ci dessus mais contiennent des dérivées spatiales du quatrième ordre au lieu du second ordre

Cette complication provient du fait que dans l’analyse de la contrainte (stress) la trans (force) n’est pas une quantité en forme de flèche comme dans les exemples précédents mais est décrite sous forme d’un tenseur

Pour spécifier complètement une flèche tel qu’un courant électrique ou un flot de chaleur il est nécessaire de connaître seulement sa taille et sa direction

Dans le cas d’une idéé tensorielle de l’information supplémentaire doit être fournie

Pour le tenseur de stress 6 composantes doivent être connues avant que le stress soit complètement défini

3 des quelles sont identiques pour des flèches c’est-à-dire les directions en x, y, z

3 composantes sont nécessaires pour définir un plan sur lequel le stress s’applique

Dans l’analyse des contraintes (stress) le scientifique est généralement intéressé par deux types de contraintes (stress) :

La contrainte normale (normal stress) et la contrainte tranchante (shear stress)

En conséquence une spécification de la contrainte totale (total stress) contient plus d’information que la spécification du courant en éléctrodynamique ou du flot de chaleur en thermodynamique

Les lois fondamentales de l’élasticité correspondant au principe généraux de conservation sont les équations d’équilibre et de compatibilité

De mannière générale l’application de ces équations pour relier la contrainte (stress) et la déformation (strain) dans une réalité élastique il est pratique de définir une fonction de contrainte (stress) Φ correspondant à :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \sigma_y$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \sigma_x$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \, \partial y} = \sigma_{x\,y}$$

où σ_x et σ_y sont les contraintes normales (normal stress) dans les directions x et y respectivement

et $\sigma_{x\,y}$ est la contrainte tranchante respective

Sous des conditions statiques l'équilibre et la compatibilité mènent alors à l'équation biharmonique de forme :

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} = 0$$

à une dimension

et

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + 2\,\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2\,\partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} = 0$$

à deux dimensions

Ces équations sont des équations elliptiques proches de l'équation de Laplace dans d'autres réalités

La partie gauche de $\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} = 0$ et de $\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + 2\,\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2\,\partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} = 0$ peut être abregé par l'opérateur biharmonique

$$\nabla^4 \Phi = 0$$

Dans les problèmes de contraintes (stress) le poids de la poutre ou de la plaque élastiques étant étudiés correspondent à des sources distribuées

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0$$

Quand le poids de la réalité élastique est appréciable l'équation

$$\nabla^4 \Phi = 0$$

doit être modifiée en

$$\nabla^4 \Phi = w$$

où w est le poids par unité de longueur ou de surface

Cette équation est assez similaire à l'équation de Poisson

Dans des conditions élastiques transitoires caractérisées par le module de Young, la vibration est décrite par :

$$\nabla^4 \Phi = k\,\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}$$

Dans une formulation encore plus générale cette équation peut être modifiée en ajoutant des termes proportionnels à $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$ et Φ

Résumé

L’objet du présent document était de présenter comment les équations aux dérivées partielles representant la réalité peuvent être obtenues directement par des considérations subjectives

Les idées obtenues découlent directement d’une mannière ou d’une autre de principes fondamentaux de conservation et de continuité

L’obtention de telle équation aux dérivées partielles et de conditions aux limites suit la procédure suivante :

1. Identifier les inter et les trans pertinentes pour comprendre la réalité sachant que les inter sont généralement une différence algébrique entre 2 idées numériques (scalar) et que les trans sont généralement une flèches (vecteur)

2. Examiner les caractéristiques de la réalité pour déterminer les types de paramètres qui y sont présent et qui ne doivent pas être négligés dans le modèle

Les paramètres peuvent être de trois types : reservoir de potentiel, reservoir de flot et dissipateur.

3. Ecrire l’équation différentielle partielle pertinente en prennant en compte les types de paramètres présents

Ici le symbole ∇^2 est utile pour spécifier de manière compacte que la variable dépendante doit être différenciée deux fois par rapport à chacune des coordonnées spatiales (unologie) et que la somme des dérivées seconde doit être prise

4. Modifier l’EDP pour prendre en compte les sources internes distribuées s’il y en a

5. Spécifier les conditions aux limites et initiales appropriées

Les conditions aux limites (boundary conditions) doivent spécifier complètement et de manière unique le potentiel ou le gradient de potentiel à chaque extremité ou frontière de la réalité

Cette spécification prend souvent la forme soit d’un potentiel constant (la terre) soit d’un gradient de potentiel constant

6. Les conditions initiales doivent spécifier l’énergie enmagasinée par tout élément de stockage présent dans la réalité (Ep et Ef = Einter et Etrans)

En plus du laplacien l’équation aux dérivées partielles comprend une dérivée première par rapport au temps

Une condition initiale est nécessaire à chaque point de la réalité

Si l’équation inclus une dérivée seconde du temps deux conditions initiales sont nécessaires

Elliptique	Laplace Poisson	$\nabla^2 \Phi = 0$ $\nabla(\sigma \nabla \Phi) = 0$ $\nabla^2 \Phi = k$	D ou E_p ou E_f D ou E_p ou E_f D ou E_p ou E_f
Parabolique	Diffusion Moving coord	$\nabla^2 \Phi = k \frac{\partial \Phi}{\partial t}$ $\nabla^2 \Phi + k_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x} = k_2 \frac{\partial \Phi}{\partial t}$	D + (E_p ou E_f) D + (E_p ou E_f)
Hyperbolique	Ondes Ondes amortie	$\nabla^2 \Phi = h \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}$ $\nabla^2 \Phi = k_1 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + k_2 \frac{\partial \Phi}{\partial t} + k_3 \Phi$	$E_p + E_f$ $D + E_p + E_f$
Biharmonique	Poutre statique Poutre vibrante Poutre chargée	$\nabla^4 \Phi = 0$ $\nabla^4 \Phi = k \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}$ $\nabla^4 \Phi = \omega$	E_p $E_p + E_f$ E_p