Equations aux dérivées partielles

Anne Borgeaud - Gianni Mocellin

Straco
http://www.straco.ch

Les équations aux dérivées partielles sont des équations générales permettant de décrire la réalité. Elles incarnent en quelque sorte une science de la réalité, autrement dit une réalitique.

Principe

Les quantités réalitiques sont des moyennes de grandeurs

- grandes devant l'échelle des fluctuations microscopiques;

- petites devant l'échelle des variations macroscopiques.

Le domaine sur lequel est réalisé la moyenne est le domaine élémentaire représentatif.

Des quantités telles que l'inertie d'individus constituant une population contenue dans un certain domaine, par exemple, sont considérées comme uniformément réparties dans le domaine au lieu d'être concentrées sur chaque individu.

On peut ainsi parler du comportement d'une population comme formant une réalité continue.

Des quantitées telles qu'une densité ou un flot peuvent ainsi être définies pour représenter le comportement des individus constituant la population.

On peut par exemple vouloir définir la densité d'une population en un point x et en un instant t. Ceci peut se faire en considérant un intervalle Δx centré en x et en mesurant la quantité d'individus dans l'intervalle.

La densité est donnée approximativement par:

$$Densit\acute{e}(Intervalle, Position, Instant) = \frac{Nombre}{Intervalle}$$

$$\rho(\Delta x, x, t) = \frac{n(\Delta x, x, t)}{\Delta x}$$

Pour une position fixe x et un instant fixé t le résultat dépend des intervalles Δx.

Il y a une incertitude intrinsèque dans la densité que l'on peut exprimer comme un principe: le principe d'incertitude.

En effet, pour calculer une densité on doit faire une moyenne sur un intervalle Δx, ce qui signifie qu'on est incertain sur la localisation précise de la dite densité, sa localisation exacte étant incertaine d'une distance de l'ordre de l'intervalle Δx.

La densité calculée est également incertaine d'une autre quantité à cause des fluctuations individuelles et cette incertitude ne peut être diminuée qu'en augmentant Δx.

Donc, le plus précisément on essaye de touver la densité en restreignant l'intervalle Δx, le plus incertain nous sommes de la position exacte de la dite densité.

La conséquence en est qu'un point réalitique a une extension suffisante pour applanir les fluctuations individuelles mais est beaucoup plus petit que les variations macroscopiques.

Méthode

La compréhension d'une réalité, quelle qu'elle soit, implique l'espace et le temps comme variables indépendantes, des potentiels locaux et des flots de caractéristiques, comme variables dépendantes et des paramètres propres au milieu dans lequel ces variables dépendantes interviennent, le tout satisfaisant un principe de conservation et de continuité ainsi que des conditions aux limites et des conditions initiales.

Les potentiels expriment une relation entre un point du domaine d'étude et un autre point du même domaine, l'un des deux points étant souvent considéré comme référence arbitraire. Ainsi, par exemple, la température, qui est souvent référée au zéro absolu, est le potentiel des réalités thermiques. De même, la pression ou, dans les systèmes gravitationnels, la vitesse, sont les potentiel des réalités fluides.

Les flots des caractéristiques étudiées, quant à eux, ne nécessitent qu'un seul point du domaine considéré pour être mesurés et peuvent donc être considérés comme traversant une section élémentaire ponctuelle du domaine d'étude. Ainsi on peut parler de flot de chaleur en thermique ou de flot de matière pour les fluides.

La méthode réalistique peut se résumer de la manière suivante:

1) Choisir les dimensions de l'espace, c'est-à-dire le référentiel approprié à l'étude: on utilise en général des références orthogonales, à moins qu'on ait des symétries par rapport à un point ou une ligne.

Pour une réalité technique, ce choix est généralement fait sur la base de la géométrie de la réalité considérée: une réalité technique existe dans un espace à trois dimensions et une représentation dans un espace à une ou deux dimensions suppose forcément des approximations.

2) Identifier dans le domaine d'étude les paramètres comportementaux de la réalité non négligeables, le domaine pouvant contenir trois types de paramètres: dissipation, accumulation de potentiel et accumulation de flot, le tout dans des proportions variables.

Par exemple, un fil électrique contient de l'inductance et de la capacitance, mais elles peuvent être négligées ou ignorées dans l'étude de la distribution du potentiel le long du dit fil, la résistance étant le paramètre de loin le plus important.

De la même manière, un individu contient de l'inductance et de la capacitance, mais elles peuvent être négligées ou ignorée dans l'étude de la distribution du potentiel entre deux bornes du comportement de l'individu, la résistance à la pulsion étant de loin le paramètre le plus important.

3) Choisir une région d'étude représentative.

Par exemple, si la réalité peut être représentée par une seule dimension spatiale x, le domaine élémentaire est un segment de droite de longueur Δx. Si le domaine est bidimensionnel, le domaine élémentaire sera une surface de grandeur $\Delta x \cdot \Delta y$ et s'il est tridimensionnel, le domaine élémentaire sera un cube de volume $\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$.

4) Exprimer le flot de caractéristique à travers chaque frontière de l'élément représentatif en termes du potentiel et de ses dérivées par rapport à l'espace et au temps.

Pour une réalité technique, un domaine à une dimension a 2 frontières, les deux point extrémité du segment, ce qui donne 2 équations; un domaine à 2 dimensions a 4 frontières et donne donc 4 équations; un domaine à trois dimensions a 6 frontières, ce qui donne 6 équations.

5) Calculer le flot de caractéristique dans l'élément étudié. Quand le domaine est purement dissipatif, cela implique seulement une sommation du flot à travers les frontières. Quand des réservoirs de potentiel et de flot sont présents, les stockages doivent être pris en compte.

6) Appliquer le principe de conservation ou de continuité du domaine de connaissance auquel la réalité appartient, ce qui implique de prendre en compte les flots qui entrent et sortent de l'élément considéré.

Il est à noter que si les paramètres caractéristiques de la réalité sont linéaires, ils sont indépendantes de toute excitation ou réponse spécifiques. Ils peuvent être mesurés en prenant un échantillon représentatif de la réalité considérée et en effectuant une experience. Dans une telle expérience, une excitation est appliquée à l'étalon et sa réponse observée. La nature et la grandeur des paramètres de la réalité sont déterminés par la relation existant entre les excitations et les réponses mesurées.

7) Faire tendre les dimensions Δx de l'élément étudié vers 0.

La procédure ci-dessus donne une équation différentielle qui décrit le comportement de la réalité considérée.

Energie

L'énergie d'un domaine d'étude peut être définie comme le produit d'un potentiel par le flot de caractéristique qu'il induit:

$$E = f_i \cdot p_j$$

Dissipation

Considérons une réalité conçue selon une seule variable spatiale x, autrement dit selon une seule référence.

On applique une différence de potentiel entre deux points de cette réalité et on mesure le flot de caractéristique résultant entre ces deux points.

Si la relation entre les deux variables que sont le potentiel et le flot est une relation de proportionnalité, on obtient la relation suivante:

$$\Delta Potentiel = -Dissipation_{\Delta x} \cdot \Delta x \cdot Flot$$

Où la dissipation $Dissipation_{\Delta x}$ est la dissipation par unité de grandeur x et Δx est la distance entre entre les deux points d'application du potentiel à la réalité considérée.

Si on fait tendre la quantité Δx vers 0, l'équation devient:

$$\frac{dPotentiel}{dx} = Dissipation_{\Delta x} \cdot Flot$$

$$\frac{dp}{dx} = -D \cdot f$$

Dans le cas où la réalité est décrite selon plusieurs références, nous avons affaire à des grandeurs vectorielles:

$$grad \cdot Potentiel = -Dissipation \cdot \overrightarrow{Flot}$$

$$\vec{\nabla} \cdot p = -D \cdot \vec{f}$$

Le terme à gauche de l'équation est le gradient du potentiel, autrement dit sa variation spatiale.

Le paramètre D est une mesure de la manière dont le milieu contenu dans le domaine d'étude dissipe l'énergie en la convertissant dans une autre forme.

Cette dissipation est dénomée de façons diverses selon les applications, par des termes allant de résistance à viscosité, en passant par résistivité ou fluidité.

Accumulation

Un milieu, quel qu'il soit, peut également se comporter comme un réservoir et accumuler dans le temps potentiel ou flot.

Potentiel

Si le milieu considéré peut accumuler du potentiel, une accumulation intervient dès lors qu'une différence de potentiel est appliquée entre deux points du milieu. Pour un milieu linéaire, plus la différence de potentiel est grande et plus l'accumulation est importante.

Par exemple, un individu peut mémoriser un comportement et y répondre par une pulsion. Le l'individu produit une pulsion orientée de manière telle à s'opposer à tout changement temporel de potentiel.

$$\Delta Flot = -Capacitance_{AuPotentiel} \cdot \Delta x \cdot \frac{\Delta Potentiel}{\Delta Temps}$$

$$\Delta f = -C_p \cdot \Delta x \cdot \frac{dp}{dt}$$

où $Capacitance_{AuPotentiel}$ est la capacité d'accumuler du potentiel par unité de référence x permettant de concevoir la réalité considérée et Δx est l'amplitude du champ d'étude prise en compte.

En faisant tendre Δx vers 0, l'équation devient:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -C_p \cdot \frac{\partial p}{\partial t}$$

Si la réalité est multidimensionnelle, la relation devient:

$$\vec{\nabla} \bullet \vec{f} = -C_p \cdot \frac{\partial p}{\partial t}$$

La capacitance à accumuler du potentiel C_p est nommée de diverses manières selon les domaines d'étude, comme inductance, inductivité ou densité par exemple.

Flot

Quand le milieu stocke un flot, il produit en retour un potentiel qui tend à s'opposer à tout changement de flot.

Par exemple, un individu peut stocker de la pulsion sous forme d'impulsion et produire en retour un comportement qui tend à s'opposer à tout changement de pulsion.

Autrement dit, la réalité est sensible à un changement temporel de flot.

$$\Delta Potentiel = -Capacitance_{AuFlot} \cdot \Delta x \cdot \frac{\Delta Flot}{\Delta Temps}$$

$$\Delta p = -C_f \cdot \Delta x \cdot \frac{\Delta f}{\Delta t}$$

Où $Capacitance_{AuFlot}$ est une mesure de la propriété linéaire selon la référence considérée d'accumuler du flot par la réalité.

Par exemple, le comportement d'un individu est proportionnel à la variation d'impulsion dans le temps, c'est-à-dire proportionnel à la pulsion.

Faisons tendre Δx vers 0, auquel cas la relation devient:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -C_f \cdot \frac{\partial f}{\partial t}$$

Dans le cas d'une réalité multidimensionnelle, cett relation s'écrit:

$$\vec{\nabla} \cdot p = -C_f \cdot \frac{\partial \vec{f}}{\partial t}$$

Cette capacité de la réalité à accumuler du flot en restituant un potentiel est nomée d'inertie à chaleur spécifique selon les domaines considérés.

Ce qui précède résulte en fait de deux principes fondamentaux utilisés pour décrire la réalité.

Un principe de conservation, qui s'applique à la propriété dont le changement est mesuré par le flot d'une caractéristique. Selon ce principe de conservation, la quantité totale de caractéristique existant dans le domaine d'étude en tout instant subséquent à un instant initial considéré doit être égale à la quantité ajoutée ou soustraite par des excitations externes au domaine plus la quantité de caractéristique présente à l'instant initial.

Par exemple, pour un individu, l'impulsion, produit de l'inertie par la convulsion, est conservée.

Le principe de continuité s'applique quant à lui aux flots et stipule qu'un flot de caractéristique est continu et doit émaner d'une source (excitation interne ou externe) et retourner à la même ou à une autre source.

Généralement, le principe de conservation implique le principe de continuité et vice-versa, l'utilisation de l'un ou de l'autre dépendant uniquement des domaines d'application particuliers.

Equations différentielles

En toute généralité, une forme différentielle à n variables serait:

$$a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + b_i \frac{\partial u}{dx_i} + fu + g = 0$$

Si les termes apparaissant dans les équations différentielles obtenues sont limités à des dérivées premières et secondes par rapport à deux variables, à l'espace et au temps par exemple, elles prennent la forme suivante:

$$a_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+2a_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^1 \partial x_2^1}+a_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+b_1\frac{\partial^1 u}{\partial x_1^1}+b_2\frac{\partial^1 u}{\partial x_2^1}+fu+g=0$$

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+2B\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^1 \partial x_2^1}+C\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+D\frac{\partial^1 u}{\partial x_1^1}+E\frac{\partial^1 u}{\partial x_2^1}+Fu+G=0$$

Les deux variables indépendantes x_1 et x_2 peuvent être toutes deux des dimensions spatiales ou l'une peut être une dimension spatiale et l'autre une dimension temporelle.

Les grandeurs relatives de *A*, *B* et *C* déterminent la nature de l'équation:

Si $A \cdot C > B^2$, comme c'est le cas quand $B=0$ et A et C sont tous deux positifs, l'équation est appelée élliptique.

Cette dénomination reste valable même si on ajoute dans la partie gauche de l'équation un autre terme du second ordre $H\frac{\partial^2 u}{\partial \gamma^2}$, ou H est un nombre positif, pour inclure les réalités tri-dimensionnelles dans cette classification.

Si $A \cdot C = B^2$, comme c'est le cas si A ou C ou B sont égaux à 0, l'équation est dite parabolique.

L'addition d'un terme du second ordre $H\frac{\partial^2 u}{\partial \gamma^2}$ n'influence pas le caractère parabolique de l'équation.

Si $A \cdot C < B^2$, comme c'est le cas si B est positif ou nul et que soit A soit C soient négatifs, l'équation est dite hyperbolique.

Cette classification des équations différentielles est utile pour déterminer les méthodes analytiques et numériques permettant d'en trouver les solutions.

On peut exprimer la même chose en parlant d'invariants dimensionnels. Ces derniers sont les suivants:

$$P_{11} = \frac{a_{11} \cdot x_2}{a_{12} \cdot x_1}$$

$$P_{22} = \frac{a_{22} \cdot x_1}{a_{12} \cdot x_2}$$

$$P_1 = \frac{b_1 \cdot x_2}{a_{12}}$$

$$P_2 = \frac{b_2 \cdot x_1}{a_{12}}$$

$$P_f = \frac{f \cdot x_1 x_2}{a_{12}}$$

$$P_g = \frac{g \cdot x_1 x_2}{a_{12} \cdot u}$$

Notons par K le produit des invariants P_{11} et P_{12}:

$$K = P_{11} \cdot P_{22} = \frac{a_{11} \cdot x_2}{a_{12} \cdot x_1} \cdot \frac{a_{22} \cdot x_1}{a_{12} \cdot x_2} = \frac{a_{11} \cdot a_{22}}{a_{12}^2}$$

Les équations sont classées selon la valeur de ce paramètre: elliptiques s'il est plus grand que 1, paraboliques s'il vaut 1 et hyperboliques s'il est plus petit que 1.

Pour résumer:

1) Les équations élliptiques sont de forme:

$$\Delta u = \nabla^2 u = 0$$

Ces équation, dites équations de Laplace, décrivent par exemple les champs éléctrostatiques de capacitances, les électrolytes, les tubes à vide, les transferts de chaleur à l'équilibre, la diffusion ou encore les champs gravifiques et magnétiques.

Si le coefficient de conduction thermique ou de diffusion dépend de la position ou si la capacitance est inhomogène, l'équation prend la forme:

$$\nabla \bullet \left(g \cdot \vec{\nabla} \cdot u \right)$$

où g est une fonction de la position.

2) Les paraboliques, dites aussi équations de Fourier, incluent les processus non stationnaires de diffusion, les transferts de chaleur, les percolations et l'hydrodynamique. Leur forme générale est:

$$\Delta \cdot u = \nabla^2 \cdot u = \alpha \cdot u_t + f \cdot u + g$$

Strictement parlant, elles ne forment une équation de Fourier que si les invariants P_f et P_g sont nuls (c'est à dire que *f* et *g* sont nuls).

3) Les hyperboliques incluent les vibrations des cordes, les membranes élastiques, les vibrations torsionnelles de barres, la propagation du son dans un fluide ou encore la propagation des ondes électromagnétiques.

Leur forme générale est:

$$\Delta \cdot u = \nabla^2 \cdot u = \alpha_1 \cdot u_{tt} + \alpha_2 \cdot u_t + f \cdot u$$

Elliptiques

Les équations élliptiques permettent de représenter des réalités dans lesquelles au plus un des caractères (Dissipation, capacitance au potentiel et capacitance au flot) existe de manière non négligeable.

Elles permettent également de représenter des réalités présentant des accumulations pour autant qu'un équilibre ait été atteint.

Monodimensionnelles

Considérons une réalité linéaire qui soit simplement conductrice du flot d'une caractéristique et présentant une dissipation constante par unité d'espace:

$$D = Dissipation_{\Delta x} = Constante$$

Cette réalité a deux frontières que sont ses deux extrémités, l'une située en x_1, l'autre en x_2.

Cette réalité est connectée à une extrémité à une source de potentiel p_1 et à l'autre extrémité à une autre source de potentiel différent p_2.

Les relations entre le potentiel et le flot aux deux frontières sont de type linéaire puisque la réalité ne présente pas d'accumulations:

$$\frac{dPotentiel_1}{dx} = -Dissipation \cdot Flot_1$$

$$\frac{dPotentiel_2}{dx} = -Dissipation \cdot Flot_2$$

Le signe moins signifie que le flot positif s'écoule dans la direction des potentiels décroissants, c'est-à-dire des hauts potentiels vers les bas potentiels.

Comme la réalité considérée est purement dissipative, en appliquant le principe de continuité nous obtenons:

$$Flot_2 = Flot_1$$

$$Flot_2 - Flot_1 = 0$$

que nous pouvons réécrire:

$$\frac{1}{Dissipation} \cdot \frac{dPotentiel_2}{dx} - \frac{1}{Dissipation} \cdot \frac{dPotentiel_1}{dx} = 0$$

Nous pouvons éliminer $Dissipation$ en multipliant des deux côtés de l'équation:

$$\frac{dPotentiel_2}{dx} - \frac{dPotentiel_1}{dx} = 0$$

et considérer cette variation sur une portion de réalité élémentaire Δx:

$$\frac{\frac{dPotentiel_2}{dx} - \frac{dPotentiel_1}{dx}}{\Delta x} = 0$$

En faisant tendre la portion élémentaire Δx vers 0, nous obtenons:

$$\frac{\partial^2 Potentiel}{\partial x^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0$$

La solution de cette équation, dite de Laplace à une dimension, donne une fonction $Potentiel(x)$.

Elle peut être trouvée tant analytiquement que numériquement.

Tridimensionnelles

Le même raisonnement s'applique pour comprendre le comportement d'une réalité tridimensionnelle présentant une propriété de dissipation uniforme dans les trois directions considérées.

Dans ce cas, l'élément différentiel du domaine est un petit bloc parallèlipédique dont la variation de potentiel entre les faces s'exprime en fonction des flots qui les traversent et de la dissipation.

Le flot peut maintenant prendre trois directions et l'équation de continuité monodimensionnelle précédente:

$$\frac{\frac{dPotentiel_2}{dx} - \frac{dPotentiel_1}{dx}}{\Delta x} = 0$$

doit être étendue aux trois dimensions de l'espace et à travers six frontières:

$$\frac{\frac{dp_2}{dx}-\frac{dp_1}{dx}}{\Delta x}+\frac{\frac{dp_4}{dy}-\frac{dp_3}{dy}}{\Delta y}+\frac{\frac{dp_6}{dz}-\frac{dp_5}{dz}}{\Delta z}=0$$

En faisant tendre Δx, Δy et Δz vers 0, nous obtenons:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}=0$$

En utilisant les opérateurs différentiels vectoriels:

$$div(grad\ p)=0$$

$$\vec{\nabla}\bullet\vec{\nabla}\cdot p=0$$

$$\nabla^2 p=0$$

Les conditions aux limites, autrement dit les excitations aux frontières, peuvent être des sources de potentiel.

Comme il existe également des sources de flot dans la réalité, il existe deux types de conditions aux limites: des potentiels spécifiés ou des flots spécifiés.

Comme aucun flot ne circule à travers une frontière non excitée, le gradient de potentiel normal à cette frontière est nul.

Si un flot non-nul est spécifié à une frontière, le gradient du potentiel normal à cette frontière doit être directement proportionnel à cette source.

Il est intéressant de constater que le coefficient de dissipation D n'apparait pas dans l'équation $\nabla^2 p=0$. Ceci se comprend par le fait que, si on se trouve exactement à mi distance des extrémités et que la réalité est homogène, le potentiel y sera exactement la moitié de la différence de potentiel entre les extrémités.

Conclusions

L'équation de Laplace ne contient pas le temps, variable indépendante par excellence. C'est un résultat direct du fait qu'il n'existe que de la dissipation dans la réalité considérée et pas d'accumulation.

La conséquence en est que si l'excitation est un fonction du temps, la réponse partout dans la réalité considérée aura exactement les mêmes caractéristiques temporelles que l'excitation. En outre l'équilibre est atteint instantanément en tout point, ce qui ne serait pas le cas s'il y avait des accumulations.

Par exemple, si un potentiel appliqué aux frontières d'une réalité est brusquement modifié, un choc ou un saut par exemple, le potentiel en tout point de la réalité changera au même instant à la nouvelle valeur.

Ceci est également vrai si la réalité ne contient que des réservoirs de potentiel ou que des réservoirs de flot. Si la réalité est constituée uniquement d'une sorte des trois éléments de base, le temps n'est pas une variable indépendante et disparait donc de la représentation du comportement de la réalité.

Le temps disparait également dans l'équation de Laplace qui décrit des réalités présentant des réservoirs et de la dissipation à condition que suffisament de temps se soit écoulé depuis l'excitation précédente et que des conditions d'équilibre ait été atteintes.

En outre, ces représentations considèrent uniquement les excitations aux frontières. Conformément au principe de conservation, toute énergie ou caractéristique pénétrant ou quittant le domaine considéré doit être gérée par des sources externes et toutes les lignes de flot doivent se terminer à la frontière du domaine.

Ceci implique directement qu'il ne peut y avoir de maximum ou de minimum de potentiel dans la réalité considérée. La présence d'un maximum de potentiel impliquerait qu'un point de la réalité aurait un potentiel supérieur aux points qui l'entourent et, comme le flot coule toujours d'un potentiel élevé vers un potentiel plus faible, un maximum signifierait que de l'énergie ou de la caractéristique étudiée émane dans toutes les directions à partir de ce point.

En analyse vectorielle, un tel phénomène est connu sous le nom de divergence et les réalités décrites par une équation de Laplace doivent avoir une divergence nulle.

De même, un minimum de potentiel impliquerait un puits d'énergie ou de caractéristique qui violerait lui aussi les principes de continuité et de conservation.

Ceci signifie aussi que les variations de potentiel représentées par leur gradient ne peuvent changer de polarité dans de telles réalités.

Extensions

Si la dissipation est elle même fonction de l'espace:

$$D = D(x)$$

le terme de dissipation ne disparaît pas de l'équation:

$$\frac{1}{Dissipation_2} \cdot \frac{dPotentiel_2}{dx} - \frac{1}{Dissipation_1} \cdot \frac{dPotentiel_1}{dx} = 0$$

$$\frac{\dfrac{1}{Dissipation_2} \cdot \dfrac{dPotentiel_2}{dx} - \dfrac{1}{Dissipation_2} \cdot \dfrac{dPotentiel_1}{dx}}{\Delta x} = 0$$

En faisant tendre Δx vers 0, nous avons maintenant:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{Dissipation(x)}\cdot\frac{\partial Potentiel}{\partial x}\right)=0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{D(x)}\cdot\frac{\partial p}{\partial x}\right)=0$$

La relation fonctionnelle entre la dissipation D et l'espace x est intégrée dans la dérivée seconde.

En tridimensionnel:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{D(x)}\cdot\frac{\partial p}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{D(y)}\cdot\frac{\partial p}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{D(z)}\cdot\frac{\partial p}{\partial z}\right)=0$$

$$\vec{\nabla}\bullet\left(\frac{1}{D}\cdot\vec{\nabla}\cdot p\right)$$

La dérivation de l'équation ci-dessus convient également quand la dissipation D est une fonction du potentiel:

$$D=f(p)$$

La réalité constituant le domaine d'étude est alors dite non-linéaire et certaines techniques mathématiques comme le théorème de superposition, par exemple, ne sont plus applicables.

S'il existe des sources de flot à l'intérieur de la réalité étudiée, comme dans les milieux radioactifs par exemple, il faut les ajouter à l'équation de continuité:

$$f_1+g_{\Delta x}\cdot\Delta x=f_2$$

$$f_1-f_2=g_{\Delta x}\cdot\Delta x$$

où $g_{\Delta x}$ est la génération de flot par unité d'espace par la source distribuée à l'intérieur de la réalité.

En multidimensionnel:

$$\vec{\nabla}\bullet\left(\frac{1}{D}\cdot\vec{\nabla}\cdot p\right)=-k\cdot g$$

Pour une dissipation qui est fonction de l'espace:

$$D=D(x,y,z)$$

g peut également être fonction de l'espace ou de p, auquel cas l'équation est connue sous le nom d'équation de Poisson.

Paraboliques

Connues aussi sous le nom d'équations de diffusion ou d'équations de conduction, ces équations permettent de représenter une réalité qui présente de la dissipation mais également une accumulation soit de potentiel soit de flot.

Monodimensionnelles

Considérons une réalité linéaire qui présente à la fois une dissipation et une accumulation de potentiel (et non de flot).

En plus des flots qui traversent les deux extrémités, il y maintenant un troisième flot qui alimente le réservoir de flot interne à la réalité.

Selon le principe de conservation:

$$Flot_1 - Flot_2 - Flot_3 = 0$$

Si la capacité de stockage de potentiel par unité d'espace est exprimée par $C_{p\Delta x}$, le flot servant à remplir le réservoir situé dans l'espace élémentaire Δx est:

$$f_3 = f_1 - f_2 = C_{p\Delta x} \cdot \Delta x \cdot \frac{\partial p}{\partial t}$$

où p est un potentiel moyen sur l'élément différentiel Δx et $C_{p\Delta x} \cdot \Delta x$ est la capacité totale du dit élément d'accumuler du flot.

La différence de flot exprimée en terme de changement de flot par unité d'espace est:

$$f_1 - f_2 = -\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \Delta x$$

et le flot peut être exprimé en terme de différentielle de potentiel:

$$f = -\frac{1}{D} \cdot \frac{\partial p}{\partial x}$$

où D représente la dissipation par unité d'espace:

En différentiant cette dernière équation par rapport à l'espace, on obtient:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{1}{D} \cdot \frac{\partial p}{\partial x}\right)$$

$$-\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{D}\cdot\frac{\partial p}{\partial x}\right)$$

et en égalant les flots, on obtient:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{D}\cdot\frac{\partial p}{\partial x}\right)\cdot\Delta x=C_{p_{\Delta x}}\cdot\Delta x\cdot\frac{\partial p}{\partial t}$$

Si la dissipation est uniforme, c'est-à-dire qu'elle n'est pas une fonction de l'espace x, nous avons:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}=D\cdot C_p\ \frac{\partial p}{\partial t}$$

Une représentation complète de la réalité inclu des conditions aux limites que sont les potentiels en tout temps $p(x_1,t)$ et $p(x_2,t)$ aux deux extrémités de la réalité ainsi que la condition initiale constituée par le potentiel $p(x\ ,t_0)$ le long de toute la réalité au temps initial, c'est à dire l'accumulation au temps initial.

Tridimensionnelles

On peut réécrire ces équations pour des réalités tridimensionnelles:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{D}\cdot\frac{\partial p}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{D}\cdot\frac{\partial p}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{D}\cdot\frac{\partial p}{\partial z}\right)=C_{p_{\Delta x}}\ \frac{\partial p}{\partial t}$$

Pour une dissipation uniforme, c'est-à-dire un D qui ne dépend pas de x:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}=D\cdot C_p\ \frac{\partial p}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla}\bullet\left(\frac{1}{D}\cdot\vec{\nabla}\cdot p\right)=Cp\frac{\partial p}{\partial t}$$

$$\nabla^2 p=k\frac{\partial p}{\partial t}$$

Autres notations:

$$u_t=\alpha^2\nabla^2 u$$

$$u_t=\alpha^2 u_{xx}$$

$$\nabla^2 \rho = \frac{1}{k}\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{DC} div\ grad\ p$$

$$D\frac{\partial u}{\partial t} - div\left(C\ grad\ u\right) + Au = F$$

$$D\frac{\partial u}{\partial t} - \vec{\nabla} \bullet \left(C\ \vec{\nabla} u\right) + Au = f$$

Hyperboliques

Une autre manière fondamentale et familière de se comporter d'une réalité est d'onduler, d'osciller ou encore de vibrer.

Si une réalité monodimensionnelle présente la caractéristique de pouvoir accumuler tant du potentiel que du flot et ne présente pas de dissipation, la variation du flot le long du champ d'étude est la suivante:

$$\Delta Flot = -Capacité_{Potentiel\Delta x} \Delta x \frac{dPotentiel}{dt}$$

$$\Delta f = -C_{p\Delta x} \Delta x \frac{dp}{dt}$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = -C_{p\Delta x} \frac{dp}{dt}$$

En faisant tendre l'élément d'étude vers 0:

$$-\frac{\partial f}{\partial x} = C_p \frac{\partial p}{\partial t}$$

Nous faisons le même raisonnement pour l'accumulation de flot le long de la réalité:

$$\Delta Potentiel = -C_{Flot\Delta x} \Delta x \frac{dFlot}{dt}$$

$$\Delta p = -C_{f\Delta x} \Delta x \frac{df}{dt}$$

$$\frac{\Delta p}{\Delta x} = -C_{f\Delta x} \frac{df}{dt}$$

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = C_f \frac{\partial f}{\partial t}$$

Dérivons l'équation d'accumulation du potentiel par t

$$-\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} = C_p \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$$

et l'équation d'accumulation du flot par x

$$-\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = C_f \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x}$$

que nous réécrivons:

$$-\frac{1}{C_f} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x}$$

Nous pouvons combiner les deux équations dérivées, ce qui nous donne:

$$C_p \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{1}{C_f} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$$

que nous pouvons réécrire:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = C_p C_f \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$$

Cette équation est connue comme l'équation d'onde.

Si on veut prédire le comportement futur d'une telle réalité ondulante, la condition au limites que constitue le potentiel aux deux extrémités doit être connue en tout temps. En outre, deux conditions initiales sont requises: d'une part la connaissance du potentiel et d'autre part celle du flot, et ceci en tout point de la réalité à l'instant initial.

A plusieurs dimensions:

$$\vec{\nabla}^2 p = C_p C_f \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$$

$$\vec{\nabla}^2 p = k \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$$

La présence des deux types de réservoir dans la réalité implique un échange d'énergie (ou de caractéristique). Aucune parcelle d'énergie insuflée à la réalité considérée ou présente dans la réalité à l'instant initial ne peut être perdue. Elle ne peut qu'être échangée entre les deux modes d'accumulation énergétiques, d'énergie potentielle à énergie cinétique par exemple. C'est ce qui donne naissance au formes familières de vagues, oscillations et autres vibrations.

Dans l'équation de diffusion, la constante k est identifiée à une durée, le taux auquel la réalité approche des conditions d'équilibre ou de stabilité. La signification de la constante de temps dans l'équation d'onde est différente puisqu'il n'existe jamais d'état stable pour une telle réalité. Dans l'équation d'onde, la constante k représente la vitesse à laquelle une perturbation se propage dans la dite réalité.

Plus la capacité de la réalité d'accumuler, résultant du produit de la capacité d'accumuler du potentiel par la capacité d'accumuler du flot, est faible et plus rapidement l'effet d'un changement soudain de l'excitation à une extrémité sera resenti à l'autre extrémité.

Dans un fluide, par exemple, l'accumulation du flot est liée à l'inertie des particules fluides alors que l'accumulation de potentiel implique une compression du fluide. Si les forces visqueuses sont négligeables comparées à l'inertie et à la compressibilité du fluide, l'équation d'onde s'applique.

En électromagnétisme, l'équation d'onde s'applique à des réalités dans lesquelles la conductivité (donc la dissipation) est négligeable mais qui présente des caractéristiques de perméabilité et diélectriques, comme le vide par exemple.

En général, une réalité présente également, outre de l'accumulation, de la dissipation. Il faut donc introduire cette dernière dans l'équation d'onde qui ne représente pour l'instant que des accumulations.

En toute généralité, il existe deux types de dissipation:

- La dissipation en série, qui produit une dissipation d'énergie en vertu de l'existence même du flot;

- La dissipation en parallèle, qui conduit à une dissipation d'énergie par fuite.

En appliquant le principe de conservation pour exprimer le changement de flot le long de la réalité, il faut inclure le flot d'énergie dans le réservoir d'énergie potentielle ainsi que celui passant à travers la dissipation en parallèle:

$$-\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{D_{Parallèle}} p + C_p \frac{\partial p}{\partial t}$$

Le gradient de potentiel s'exprime comme:

$$-\frac{\partial f}{\partial x} = D_{Série} f + C_f \frac{\partial f}{\partial t}$$

En combinant ces équations nous obtenons:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = C_p C_f \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \left(D_{Parallèle} C_p + D_{Série} C_f \right) \frac{\partial p}{\partial t} + D_{Parallèle} D_{Série} p$$

Ceci est l'expression la plus générale du comportement d'une réalité monodimensionnelle. Elle est parfois appelée équation du télégraphe car elle permet de décrire la distribution du voltage le long d'un fil de transmission.

Si les deux termes de dissipation $D_{Parallèle}$ et $D_{Série}$ sont nuls, nous retrouvons l'équation d'onde.

Si d'autre part la capacité d'accumuler du flot C_f et la dissipation parallèle $D_{Parallèle}$ sont nuls, nous retrouvons l'équation de diffusion:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = C_f D_{Série} \frac{\partial p}{\partial t}$$

Si trois paramètres sur les quatres C_p, C_f, $D_{Parallèle}$ ou $D_{Série}$ sont nuls, on obtient l'équation de Laplace:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0$$

En termes plus généraux, c'est à dire tridimensionnels, nous pouvons écrire l'équation sous la forme:

$$\vec{\nabla}^2 p = k_1 \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + k_2 \frac{\partial p}{\partial t} + k_3 p$$

Biharmoniques

La notion de stress sur une réalité ajoute une complication dans le sens que le flot n'est pas une quantité vectorielle, comme précédemment, mais une grandeur tensorielle.

Pour spécifier complètement une quantité vectorielle, comme un courant d'électricité ou de chaleur, il est nécessaire de connaitre seulement sa direction et sa magnitude. Dans le cas d'une grandeur tensorielle, il faut plus d'information. Dans l'espace technique et dans le cas du tenseur de stress, par exemple, il faut connaître six grandeurs pour le définir complètement. Trois sont du même type que pour une grandeur vectorielle (les composantes dans les trois directions de l'espace). Trois autres composantes sont nécessaires pour définir le plan sur lequel le stress est référé.

Dans l'étude du stress on est concerné par deux types de stress: le stress pressant et le stress tranchant. Une spécification du stress total contient plus d'information que la spécification de courants électriques ou thermiques, par exemple.

Le comportement d'une réalité élastique correspond malgé tout aux principes généraux de conservation que sont l'équilibre et la compatibilité et conduit à des équations obtenues reliant le stress à la déformation.

On peut définir une fonction de stress:

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = \sigma_y$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = \sigma_x$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x \partial y} = \rho_{xy}$$

où σ_x et σ_y sont les stress normaux dans les directions x et y et ρ_{xy} est le stress tranchant correspondant.

A une dimension, les conditions statiques, l'équilibre et la compatibilité conduisent à une équation de la forme:

$$\frac{\partial^4\phi}{\partial x^4} = 0$$

A deux dimension:

$$\frac{\partial^4\phi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4\phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4\phi}{\partial y^4} = 0$$

Ces équations sont des équations élliptiques. La partie gauche peut être abbrégée par l'opérateur biharmonique $\nabla^4\phi$, ce qui permet d'exprimer ces équations sous la forme compacte:

$$\nabla^4\phi = 0$$

Dans les problèmes de stress, le poids de la réalité étudiée correspond a des sources internes distribuées, ce qui fait que lorsque le poids est appréciable l'équation doit être écrite:

$$\nabla^4\phi = w$$

où w est le poids par unité d'espace, c'est-à-dire longueur, surface ou volume.

Cette expression a donc la même forme que l'équation de Poisson.

En conditions variables les forces élastiques entrent en jeu et provoquent des vibrations décrites par l'équation

$$\nabla^4\phi = k\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}$$

Bond graphes

Dans des représentations discontinues de la réalité, comme les bond graphes par exemple, la réalité est considérée comme composée d'un réseau d'éléments interconnectés.

Les lignes liant les éléments n'ont d'autre signification que de montrer une relation conceptuelle entre les éléments, c'est-à-dire un transfert d'énergie sous forme de puissance. Les dimensions spatiales et les positions des éléments n'ont aucune incidence sur l'étude de la réalité considérée.

De telles représentations, bien qu'approximatives, se révèlent largement suffisantes pour certaines études.

Elle ont des conséquences expérimentales importantes en ce sens que le choix des éléments se fait en fonction des contraintes d'observation et d'action qui ne sont pas les même que celles du continu où les senseurs ne mesurent souvent que des valeurs locales, donc liées à l'espace.

Le choix du nombre de capteurs et leurs positions sont alors fondamentaux pour vérifier la qualité de la représentation.